

DANIEL VLĂDUCU

MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

Ediția a II-a

Editura Paralela 45

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
VLĂDUCU, DANIEL

Memorator de matematică pentru clasele IX-XII / Daniel
Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 2-a. - Pitești : Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-2896-1

I. Kása, Márta

51

CUPRINS

ALGEBRĂ	9
1. Formule de calcul prescurtat	9
2. Sume remarcabile	9
3. Modulul	10
4. Partea întreagă, partea fracționară.....	11
5. Inegalități remarcabile	11
6. Elemente de logică matematică, mulțimi	13
7. Inducție matematică, probleme simple de numărare	14
8. Puteri și radicali	14
9. Logaritmi	15
10. Progresii aritmetice, progresii geometrice.....	16
11. Elemente de combinatorică.....	17
12. Binomul lui Newton.....	18
13. Funcții, funcția de gradul I.....	18
14. Ecuația de gradul al II-lea	20
15. Funcția de gradul al II-lea	21
16. Funcții injective, surjective, bijective	24
17. Funcția putere, funcția radical, ecuații	24
18. Funcția exponențială, funcția logaritmică	25
19. Funcții trigonometrice.....	26
20. Matematici financiare	27
21. Elemente de statistică.....	28
22. Probabilitate.....	29
23. Variabile aleatoare	31
24. Numere complexe sub formă algebrică.....	31

25. Aplicații în geometria plană.....	33
26. Forma trigonometrică a unui număr complex, operații, ecuații, aplicații.....	33
27. Permutări.....	34
28. Determinanți.....	35
29. Inversa unei matrice.....	35
30. Rangul unei matrice.....	36
31. Sisteme liniare.....	36
32. Legi de compoziție.....	38
33. Structuri algebrice.....	39
34. Inele de polinoame.....	41
35. Polinoame cu coeficienți complecși.....	43
TRIGONOMETRIE	45
1. Elemente de trigonometrie.....	45
2. Formule trigonometrice.....	46
3. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană.....	48
ANALIZĂ MATEMATICĂ	51
I. ȘIRURI.....	51
1. Șiruri monotone.....	51
2. Șiruri mărginite.....	51
3. Limita unui șir.....	51
4. Șiruri convergente.....	52
5. Convergență și mărginire.....	53

6. Criterii de convergență/divergență a șirurilor.....	53
7. Operații cu șiruri convergente.....	54
8. Cazuri de trecere la limită rezolvate.....	55
9. Cazuri de nedeterminare (exceptate).....	57
10. Limite remarcabile de șiruri.....	57
II. LIMITE DE FUNCȚII.....	58
1. Limita unei funcții într-un punct.....	58
2. Limite laterale.....	58
3. Limite remarcabile.....	59
III. FUNCȚII CONTINUE.....	61
1. Noțiuni generale.....	61
2. Clase de funcții continue.....	61
3. Proprietățile funcțiilor continue.....	61
IV. FUNCȚII DERIVABILE.....	63
1. Noțiuni generale.....	63
2. Clase de funcții derivabile.....	63
3. Reguli de derivare.....	64
4. Derivata unei funcții compuse.....	64
5. Derivata unei funcții inverse.....	64
6. Derivatele funcțiilor elementare și compuse.....	65
7. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....	67
Teorema lui Fermat.....	67
Teorema lui Rolle.....	67
Teorema lui Cauchy.....	67
Teorema lui Lagrange.....	68
Teorema lui Darboux.....	69

Regula lui l'Hospital	69
8. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune	70
9. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere	71
10. Asimptote	71
Asimptote orizontale	71
Asimptote verticale	71
Asimptote oblice	72
V. PRIMITIVE	73
1. Noțiuni generale	73
2. Integrala nedefinită	73
3. Clase de funcții care admit primitive	74
4. Integrare. Metode de integrare	74
Metoda de integrare prin părți	74
Metoda schimbării de variabilă	75
5. Primitive uzuale	75
Primitivele funcțiilor elementare	75
VI. INTEGRALE DEFINITE	78
1. Diviziuni	78
2. Sume Darboux, sume Riemann	79
3. Integrala definită	80
Funcții integrabile în sens Riemann	80
4. Clase de funcții integrabile	80
5. Proprietăți ale integralelor definite	81
Proprietatea de liniaritate	81
Proprietatea de monotonie	81
Proprietăți ale integralei ca funcție de interval	82

6. Formula Leibniz-Newton	82
7. Formula de medie	82
8. Formula de integrare prin părți	82
9. Formula schimbare de variabilă	83
10. Aplicații ale integralelor definite	83

GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU 85

I. VECTORI LEGAȚI	85
1. Noțiuni generale	85
Direcție	85
Sens	85
Lungime	85
2. Vectori legați echipolenți	86
3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat	86
II. VECTORI LIBERI	87
1. Noțiuni generale	87
2. Operații cu vectori liberi	87
Adunarea vectorilor liberi	87
Scăderea vectorilor liberi	88
Înmulțirea unui vector liber cu un număr real	88
3. Vectorul de poziție	89
4. Vectori paraleli	90
5. Lungimea unui vector liber în plan	90
6. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan	91
7. Lungimea unui vector liber în spațiu	92
8. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu	92

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93
REPER CARTEZIAN ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93
f. Reperul cartezian ament și câmp	93
2. Distanța dintre două puncte în plan	95

ALGEBRĂ



FORMULE DE CALCUL PRESURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \cdot ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$;
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac))$;
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$.



SUME REMARCBILE

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

MODULUL

Definiție: Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice}$$

expresie $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;
- $|x| < c$, $c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$;
- $|x| > c$, $c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$;
- $\| |x| - |y| \| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$; \exists „ \Rightarrow ” $\Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;

$$\bullet \min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2} \text{ și } \max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$$



PARTEA ÎNTREAGĂ, PARTEA FRAȚIONARĂ

Definiții:

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mic număr întreg cel mult egal cu numărul x și se notează $[x]$.

Partea fracționară a lui x se notează $\{x\}$ și $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăți:

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
- $[m+x] = m + [x]$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $\{m+x\} = \{x\}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$;
- $x-1 < [x] \leq x < [x]+1$;
- $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ (**Hermite**).



INEGALITĂȚI REMARCABILE

- Dacă $a \cdot b > 0$, atunci $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
- $x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z \in \mathbb{R};$
- $3 \cdot (xy + yx + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$

Respect pentru oameni și cărți

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$, unde

$$m_h = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (\text{media armonică}),$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media geometrică}),$$

$$m_a = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \quad (\text{media aritmetică}),$$

$$m_p = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \quad (\text{media pătratică}).$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Inegalitatea lui Minkowski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîșev

Dacă $(a_k)_{k \geq 1}, (b_k)_{k \geq 1}$ sunt două șiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă $(a_k), (b_k)$ sunt două șiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \geq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1 + \alpha)^r \geq 1 + r\alpha, \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \alpha \geq -1, r \geq 0$$



ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULȚIMI

- Se numește propoziție, în sensul logicii matematice, un enunț care, într-un context dat, este fie adevărat, fie fals.

Valoare de adevăr, tabele de adevăr

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

- Se numește predicat un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care devine propoziție oricum am înlocui variabilele cu valori alese dintr-o mulțime.

GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU

I. VECTORI LEGAȚI



NOȚIUNI GENERALE

Definiție: Se numește **segment orientat** sau **vector legat** orice pereche ordonată (A, B) de puncte din plan.

Notatie: \overline{AB} .

Punctul A se numește **originea vectorului**, iar punctul B se numește **extremitatea vectorului** legat \overline{AB} .

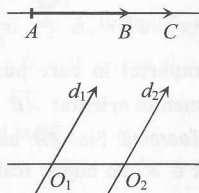
DIRECȚIE

Definiție: Doi vectori legați au **aceeași direcție** dacă sunt nenuli și dreptele lor suport sunt paralele sau coincid.

SENS

Definiții:

- Doi vectori legați nenuli coliniari au **aceleași sens** dacă sensurile de parcurs determinate pe dreapta suport comună coincid.
- Doi vectori legați nenuli paraleli au **aceleași sens** dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care le unește originile.



LUNGIME

Definiții:

- Fie \overline{AB} un vector legat. **Lungimea vectorului legat** \overline{AB} este distanța dintre punctele A și B , cu alte cuvinte, lungimea segmentului

4. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă. Lungimea arcului aflat pe graficul funcției f având extremitățile în punctele $A_0(a, f(a))$ și $A_n(b, f(b))$, este:

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

5. Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă. Suprafața corpului C_f generat prin rotația în jurul axei Ox a domeniului plan situat între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de cotații $x = a$, $x = b$ are aria:

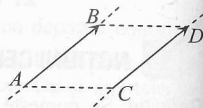
$$\text{aria}(C_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

neorientat AB . Lungimea vectorului legat \overline{AB} se mai numește și **norma** sau **modulul** lui \overline{AB} .

Notăție: $|\overline{AB}|$, $\|\overline{AB}\|$, $d(A, B)$ sau AB .

Respect pentru oameni și cărți
 **VECTORI LEGAȚI ECHIPOLENȚI**

Definiție: Doi vectori legați nenuli se numesc **echipolenți** dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.



 **RAPORTUL ÎN CARE UN PUNCT ÎMPARTE UN SEGMENT ORIENTAT**

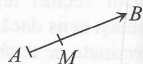
Definiții:

• Fie \overline{AB} un segment orientat (vector liber) nenul. Spunem că **punctul M împarte segmentul orientat \overline{AB} în raportul k** , $k \in \mathbb{R}^*$, dacă are loc relația:

$$\overline{MA} = k \cdot \overline{MB}.$$

• Numărul $k = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ se numește

raportul în care punctul M împarte segmentul orientat \overline{AB} .



Teoremă: Fie \overline{AB} un segment orientat (vector liber) nenul. Fie $k \in \mathbb{R}^*$ un număr real și M un punct de pe segmentul neorientat AB astfel încât $\overline{MA} = k \cdot \overline{MB}$. Dacă O este originea planului \mathcal{P} , atunci are loc relația:

$$\overline{OM} = \frac{1}{1-k} \overline{OA} + \frac{k}{1-k} \overline{OB}.$$

II. VECTORI LIBERI



NOȚIUNI GENERALE

Definiție: Se numește **vector liber** mulțimea tuturor vectorilor legați, echipolenți cu un vector legat dat.



OPERAȚII CU VECTORI LIBERI

ADUNAREA VECTORILOR LIBERI

Definiție: Definim **suma vectorilor liberi** \vec{u} și \vec{v} ca fiind vectorul $\vec{u} + \vec{v}$ care are ca reprezentant vectorul legat \overline{OB} ce verifică relația:

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}.$$

Relația de mai sus se numește **regula triunghiului** sau **relația lui Chasles**.

Proprietățile adunării vectorilor liberi

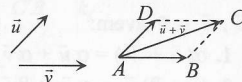
Fie \mathcal{V} mulțimea vectorilor liberi din plan. Avem proprietățile:

1. comutativitate: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$;
2. asociativitate: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$;
3. element neutru: $\exists \vec{0} \in \mathcal{V}$ astfel încât $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$; vectorul $\vec{0}$ este vectorul nul;
4. element opus: $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}$, $\exists -\vec{u} \in \mathcal{V}$, astfel încât $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.

Regula paralelogramului

Fie vectorii liberi $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$.

Luăm \overline{AB} reprezentant al vectorului liber \vec{u} și \overline{AD} reprezentant al vectorului liber \vec{v} .



Construim paralelogramul $ABCD$, unde C este vârful diagonal opus lui A . Vectorul legat \overline{AC} este reprezentantul vectorului liber sumă $\vec{u} + \vec{v}$.

SCĂDEREA VECTORILOR LIBERI

Fie $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ doi vectori liberi necoliniari. Fie \overline{OA} un reprezentant al vectorului \vec{u} și \overline{OB} un reprezentant al vectorului \vec{v} .

Definiție: Definim **diferența vectorilor liberi** \vec{u}, \vec{v} , ca fiind suma dintre vectorul \vec{u} și opusul lui \vec{v} ,

adică vectorul liber $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$,

care are ca reprezentant vectorul legat \overline{BA} ce verifică relația

$$\overline{BA} = \overline{OA} - \overline{OB}.$$

(Oricare ar fi punctele $A, B \in \mathcal{P}$ avem $\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$.)

ÎNMULȚIREA UNUI VECTOR LIBER CU UN NUMĂR REAL

Fie \mathcal{V} mulțimea vectorilor liberi din plan.

Definiție: Fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$ un număr real nenul și $\vec{u} \in \mathcal{V}$ un vector liber nenul. Definim **produsul dintre numărul real α și vectorul liber \vec{u}** ca fiind vectorul $\alpha \vec{u}$, care are:

- aceeași direcție cu \vec{u} ;
- același sens cu \vec{u} dacă $\alpha > 0$ și un sens contrar lui \vec{u} dacă $\alpha < 0$;
- lungimea $|\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$.

Proprietățile înmulțirii unui vector liber cu un număr real

Pentru orice numere reale nenule $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și orice vectori liberi

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ avem:

- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

$$3. (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}) = \beta(\alpha\vec{u});$$

$$4. 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}.$$



VECTORUL DE POZIȚIE

Fixând un punct O în planul \mathcal{P} , oricărui punct M din planul \mathcal{P} i se asociază vectorul $\vec{r} = \overline{OM}$, numit **vectorul de poziție al punctului M** .

Notații: $M(\vec{r})$ – punctul M care are ca vector de poziție vectorul \vec{r} ;

\vec{r}_M – vectorul de poziție al punctului M .

• Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat

Fie O un punct din plan, segmentul $[AB]$ și $M \in (AB)$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = k$. Fie $A(\vec{r}_A), B(\vec{r}_B), M(\vec{r}_M)$. Atunci

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A - k\vec{r}_B}{1-k} = \frac{1}{1-k}\vec{r}_A - \frac{k}{1-k}\vec{r}_B.$$

Caz particular: $k = 1$

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2} \text{ – vectorul de poziție al mijlocului segmentului } [AB]$$

• Vectorul de poziție al punctului de concurență a trei cievine într-un triunghi

ABC – triunghi; O – punct fix în spațiu; M – punctul de concurență al cievanelor AA', BB', CC' , unde

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{k_3}{k_2}, \frac{CB'}{B'A} = \frac{k_1}{k_3}, \frac{AC'}{C'B} = \frac{k_2}{k_1},$$

$$\text{atunci } \vec{r}_M = \frac{k_1\vec{r}_A + k_2\vec{r}_B + k_3\vec{r}_C}{k_1 + k_2 + k_3}.$$